INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE.

Mai 1976. — Option MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Les parties I *et* II *sont indépendantes.*

La partie III *utilise des résultats* énoncés *dans les parties* I *et* II. *Les candidats pourront admettre ces résultats s'ils n'ont pu les établir.*

Tous les calculs qui interviennent dans ce problème devront être soigneusement justifiés.

I

On rappelle qu'une suite de nombres réels est une application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$. Si u est une suite de réels, on note $u(n)$ la valeur prise par u au point n de $\mathbf{N}$.

Si u et v sont deux suites de réels, la somme $u + v$ est définie par la formule :

(*) $\quad (\forall\, n \in \mathbf{N}) \qquad (u + v)(n) = u(n) + v(n)$.

Si u est une suite de réels et λ un nombre réel, le produit λu est défini par :

(**) $\quad (\forall\, n \in \mathbf{N}) \qquad (\lambda u)(n) = \lambda u(n)$.

Soit α un nombre réel positif ou nul. On désigne par E_α l'ensemble des suites u de réels telles que la *série* de terme général : $(n+1)^\alpha u(n)$ soit *absolument convergente.*

Si u appartient à E_α, on pose :

$$N_\alpha(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^\alpha \, |u(n)|$$

1° Montrer que E_α muni des opérations (*) et (**) est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ et N_α une norme sur E_α.

Quelle relation d'inclusion existe-t-il entre E_α et E_β si α et β sont des réels tels que $0 \leqslant \alpha < \beta$?

2° Pour chacune des suites suivantes, préciser l'ensemble des valeurs de α, pour lesquelles la suite appartient à E_α.

a. $u(n) = a^n$; a réel quelconque.

b. $v(n) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{(n^\beta)}$; β réel , $\beta > 0$.

c. $w(n) = 1 - \left(\dfrac{n^3 - 1}{n^3 + 1}\right)^n$.

3° On définit sur l'ensemble des suites de réels une loi de composition interne notée Δ, par la formule :

$$(\forall\, n \in \mathbf{N}) \ , \ (u \Delta v)(n) = u(0)v(n) + u(1)v(n-1) + \ldots + u(n)v(0).$$

Montrer que, si u et v appartiennent à E_α, $u\Delta v$ appartient à E_α, et, de plus :

$$N_\alpha(u \Delta v) \leqslant N_\alpha(u) . N_\alpha(v) .$$

4° Soit $\{u_p\}_{p \in \mathbf{N}}$, *une suite d'éléments de* E_α telle que la série de terme général $\xi_p = N_\alpha(u_p)$ soit convergente.

Montrer que la série de terme général u_p est convergente dans l'espace vectoriel E_α muni de la norme N_α.

.../...

II

Dans toute cette partie, r désigne un nombre réel vérifiant la condition :

$$0 < r < 1 .$$

On lui associe la fonction réelle D_r définie sur $\mathbf{R}$ par la formule :

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad D_r(x) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} .$$

1° *a.* Étudier les variations de D_r sur l'intervalle $[-\pi , +\pi]$ et en donner une représentation graphique.

b. Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} D_r(x)\, dx .$$

2° *a.* Montrer pour tout x appartenant à $]0 , \pi]$,

$$\lim_{r \to 1} D_r(x) = 0 .$$

De plus, si ε appartient à $]0 , \pi[$, la convergence est uniforme sur $[\varepsilon , \pi]$.

b. Soit ε appartenant à $]0 , \pi[$. Calculer :

$$\lim_{r \to 1} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} D_r(x)\, dx .$$

c. Soit f une fonction réelle, continue sur $[0 , \pi]$.

Montrer :

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{\pi} f(x)\, D_r(x)\, dx = \pi f(0) .$$

d. Soit f une fonction réelle, continue sur $[0 , \pi]$ et x un élément de $[-\pi , +\pi]$.

Calculer :

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{\pi} f(t)\, D_r(t - x)\, dt .$$

3° Établir une relation simple entre $D_r(x)$ et la partie réelle de $\dfrac{1}{1 - re^{ix}}$; x étant réel.

En déduire un développement en série de D_r de la forme :

$$D_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n \cos nx$$

où les α_n sont des constantes que l'on déterminera.

Retrouver, à partir de ce résultat, la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} D_r(x)\, dx .$$

4° Soit f une fonction réelle continue sur $[0 , \pi]$. On lui associe la suite a définie par :

$$(1) \quad \begin{cases} a(0) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\, dx \\ \text{et} \quad a(n) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \qquad \text{pour } n \geqslant 1 . \end{cases}$$

a. Montrer que pour tout x appartenant à $[0 , \pi]$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) \left[D_r(t - x) + D_r(t + x) \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)\, r^n \cos nx .$$

b. Montrer que si la série de terme général $a(n)$ est absolument convergente; pour tout x appartenant à $[0 , \pi]$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) \cos nx .$$

.../...

III

On reprend les notations de I.

A tout élément u de E_0, on associe la fonction f continue sur $[0, \pi]$, qui est définie par la formule

$$(\forall x \in [0, \pi]) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) \cos nx .$$

On désigne par $\mathcal{A}$ l'application de E_0 dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0, \pi]$ ainsi construite.

Pour tout $\alpha \geqslant 0$, on appelle A_α l'image de E_α par $\mathcal{A}$.

1° *a.* Montrer que $\mathcal{A}$ est une application linéaire injective, et, sur E_0, l'isomorphisme réciproque $\mathcal{A}^{-1}$ est défini par les formules (1) de la question II. 4°.

b. En déduire que pour tout $\alpha \geqslant 0$, A_α est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, et l'application :

$$f \longmapsto \|f\|_\alpha = N_\alpha [\mathcal{A}^{-1}(f)] ,$$

une norme sur A_α, vérifiant la condition :

$$\|f\|_\alpha \geqslant \sup_{x \in [0,\pi]} |f(x)| .$$

2° Soit $\alpha \geqslant 0$ et p la partie entière de α. Montrer que toute fonction appartenant à A_α possède des dérivées continues sur $[0, \pi]$ jusqu'à l'ordre p.

3° Soit f une fonction continue réelle sur $[0, \pi]$ possédant des dérivées première et seconde continues sur $[0, \pi]$.

Montrer que f appartient à A_0.

4° *a.* Soit n un entier, $n > 0$. Montrer que la fonction $x \longmapsto \sin nx$ appartient à A_0 et que sa norme dans A_0 ne dépend pas de n.

b. Soit u un élément de E_0 et g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par :

$$(\forall x \in [0, \pi]) \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u(n) \sin nx .$$

Montrer que g appartient à A_0.

5° *a.* Soient p et n des entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$.

Soit $\alpha \geqslant 0$. Montrer que la fonction $x \longmapsto \cos px \cos (n-p)x$ appartient à A_α et que sa norme dans A_α est inférieure à $(n+1)^\alpha$.

b. Soit $\alpha \geqslant 0$; f et g appartenant à A_α, montrer que fg appartient à A_α et que :

$$\|fg\|_\alpha \leqslant \|f\|_\alpha \cdot \|g\|_\alpha .$$

6° Soit c une suite de nombres réels telle que la série entière de terme général $c(n)x^n$ ait un rayon de convergence infini. Pour tout x appartenant à $\mathbf{R}$, on pose :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n) x^n .$$

Montrer que, pour tout $\alpha \geqslant 0$ et tout f appartenant à A_α, la fonction composée $F \circ f$ appartient à A_α.

7° Soit f une fonction continue réelle sur $[0, \pi]$, possédant des dérivées première et seconde continues sur $[0, \pi]$. Montrer que f appartient à A_2 si et seulement si les conditions :

(*i*) $\quad f'(0) = f'(\pi) = 0$

(*ii*) $\quad f''$ appartient à A_0,

sont toutes deux satisfaites.

8° Soit F une fonction continue sur $\mathbf{R}$, réelle, possédant des dérivées continues jusqu'à l'ordre 4.

Montrer que pour tout f appartenant à A_2, la fonction composée $F \circ f$ appartient à A_2.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail